PART2　等式の証明

例題

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

Point Pickup

練習

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(3)　$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ のとき，$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

第 2 講　PART2 確認問題

次の等式を証明せよ。

1　$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

[証明]

$(\text{右辺})=\frac{1}{2}\left(a^2-\boxed{\text{ア}}\,ab+b^2+b^2-\boxed{\text{イ}}\,bc+c^2\right.$

$\left.+c^2-\boxed{\text{ウ}}\,ca+a^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-\boxed{\text{ア}}\,ab\right.$

$\left.-\boxed{\text{イ}}\,bc-\boxed{\text{ウ}}\,ca\right)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=(\text{左辺})$

よって

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

2 $a+b+c=0$ のとき

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+8abc=0$$

［証明］

$a+b+c=0$ より　$c=\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b$

このとき

$$
\begin{aligned}
&(\text{左辺})\\
&=\left\{a+b-\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)\right\}\cdot\left\{b+\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)-a\right\}\\
&\qquad\cdot\left\{\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)+a-b\right\}+8ab\left(\boxed{\text{エ}}a\boxed{\text{オ}}b\right)\\
&=\left(\boxed{\text{カ}}a+\boxed{\text{キ}}b\right)\cdot\left(\boxed{\text{クケ}}a\right)\cdot(-2b)-8a^2b-8ab^2\\
&=8a^2b+8ab^2-8a^2b-8ab^2=0=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

よって

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+8abc=0$$

3 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき

$$\frac{x^2-y^2-z^2}{a^2-b^2-c^2}=\frac{xy-yz-zx}{ab-bc-ca}$$

[証明]

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと

$$x=\boxed{コ},\ y=\boxed{サ},\ z=\boxed{シ}$$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{(ak)^2-(bk)^2-\left(\boxed{ス}\right)^2}{a^2-b^2-c^2}$$

$$=\frac{k^2\left(a^2-b^2-c^2\right)}{a^2-b^2-c^2}=\boxed{セ}$$

$$(\text{右辺})=\frac{ak\cdot\boxed{ソ}-bk\cdot ck-ck\cdot\boxed{タ}}{ab-bc-ca}$$

$$=\frac{\boxed{チ}(ab-bc-ca)}{ab-bc-ca}=\boxed{ツ}$$

よって

$$\frac{x^2-y^2-z^2}{a^2-b^2-c^2}=\frac{xy-yz-zx}{ab-bc-ca}$$

[$\boxed{コ}$～$\boxed{ツ}$ の選択肢]

①　ak　②　bk　③　ck

④　a^2　⑤　b^2　⑥　c^2

⑦　k　⑧　k^2

PART2　等式の証明

例題

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

(1)　(右辺) $=\dfrac{1}{2}\left(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(2a^2+2b^2\right)=a^2+b^2=$ (左辺)

よって　$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ より $c=-a-b$

このとき

(左辺) $=2a^2+b(-a-b)=2a^2-ab-b^2$

(右辺) $=(b-a)\{(-a-b)-a\}=(b-a)(-2a-b)=2a^2-ab-b^2$

よって　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

このとき

(左辺) $=\dfrac{bk-b}{b}=\dfrac{b(k-1)}{b}=k-1$

(右辺) $=\dfrac{dk-d}{d}=\dfrac{d(k-1)}{d}=k-1$

よって　$\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

練習

次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ のとき，$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(3)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

(1)　$(\text{右辺})=\dfrac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2)$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=(\text{左辺})$$

よって　$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

(2)　$a+b+c=0$ より $c=-a-b$

このとき

$$(\text{左辺})=(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)+ab(-a-b)$$

$$=(a+b)\cdot(-a)\cdot(-b)-a^2b-ab^2$$

$$=a^2b+ab^2-a^2b-ab^2=0=(\text{右辺})$$

よって　$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

(3)　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと　$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=k^2$$

$$(\text{右辺})=\frac{ak\cdot bk+bk\cdot ck+ck\cdot ak}{ab+bc+ca}=\frac{k^2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=k^2$$

よって　$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{xy+yz+zx}{ab+bc+ca}$

第2講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2，ウ：2

[解説]

（右辺）　[A]

$$=\frac{1}{2}\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right)$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

＝（左辺）

よって

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

> [A]　等式 $A=B$ の証明
> ・ A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。
> ・ A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。
> ・ $A-B=0$ であることを導く。（$A-B$ を計算して 0 になる。）

2

[正解] エ：－，オ：－，カ：2，キ：2，クケ：－2

[解説]

$a+b+c=0$ より　$c=-a-b$　[B]

このとき

（左辺）　[C]

$$=\{a+b-(-a-b)\}\cdot\{b+(-a-b)-a\}\cdot\{(-a-b)+a-b\}+8ab(-a-b)$$

$$=(2a+2b)\cdot(-2a)\cdot(-2b)-8a^2b-8ab^2$$

$$=8a^2b+8ab^2-8a^2b-8ab^2$$

$=0=$（右辺）

よって

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+8abc=0$$

> [B]　条件式を用いて，文字を減らす。

> [C]　等式 $A=B$ の証明
> ・ A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。
> ・ A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。
> ・ $A-B=0$ であることを導く。（$A-B$ を計算して 0 になる。）

3 [正解] コ：①，サ：②，シ：③，ス：③，セ：⑧，
ソ：②，タ：①，チ：⑧，ツ：⑧

[解説]

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと [D]

$$x=\boldsymbol{ak},\ y=\boldsymbol{bk},\ z=\boldsymbol{ck}$$

このとき

$$(\text{左辺})=\frac{(ak)^2-(bk)^2-(\boldsymbol{ck})^2}{a^2-b^2-c^2}$$ [E]

$$=\frac{a^2k^2-b^2k^2-c^2k^2}{a^2-b^2-c^2}$$

$$=\frac{k^2\left(a^2-b^2-c^2\right)}{a^2-b^2-c^2}=\boldsymbol{k^2}$$

$$(\text{右辺})=\frac{ak\cdot\boldsymbol{bk}-bk\cdot ck-ck\cdot\boldsymbol{ak}}{ab-bc-ca}$$ [E]

$$=\frac{\boldsymbol{k^2}(ab-bc-ca)}{ab-bc-ca}=\boldsymbol{k^2}$$

よって

$$\frac{x^2-y^2-z^2}{a^2-b^2-c^2}=\frac{xy-yz-zx}{ab-bc-ca}$$

［D］　条件式が比例式 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ などと与えられている場合は
（比例式）$=k$
とおくとよい。

［E］　等式 $A=B$ の証明
A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。